作业十 （1月5日课堂上交）

1. 本题是关于 $\mathbb{R}^n$ 上的刚体变换的。本题中，采用如下定义：在 $\mathbb{R}^n$ 中，我们说子集 A 和 B 是刚体等价的，如果存在 $\mathbb{R}^n$ 上的刚体变换 ρ ，使得 $\rho(A) = B$ 。我们说集合 $A \in \mathbb{R}^n$ 是有界的，如果存在 $K \in \mathbb{R}_{>0}$ ，使得 $\sup\limits_{x,y\in A} \mathrm{d}(x,y) < K$ ，其中 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ ， $y = (y_1, \cdots, y_n)$ ，且 $\mathrm{d}(x,y)$ 定义为 $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ 。

a) 构造 $\mathbb{R}^2$ 中的有界子集 A ，使得 A 刚体等价于 A 的某个真子集。

b) 构造 $\mathbb{R}$ 中的子集 A ，使得 A 刚体等价于 A 的某个真子集。

c) 证明：不存在 $\mathbb{R}$ 中的有界子集 A，使得 A 刚体等价于 A 的某个真子集。

注：在 c) 的证明中，可以直接使用《数学分析》课程中学到的所有概念和相关性质，比如上/下确界、函数连续性（刚体变换一定是连续的）、单调性（可以考虑先证明 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的刚体变换作为函数来看一定是单调函数）等。

2. 本题目是关于课上提过的 “$\mathbb{E}_3$ 包含自由群 $\mathbb{F}_2$” 这个事实之部分验证，这里 $\mathbb{E}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的刚体变换群。

a) 对于任意的一个 3×3 实矩阵 A，我们可以将其看为一个从 $\mathbb{R}^3$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的映射，定义如下：

$$A\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ x \longmapsto A \cdot x \quad ,$$

其中 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ ，$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ ，而 $A\cdot x$ 就是标准的矩阵乘法。

对于任意给定的 $\theta\in\mathbb{R}$ ，令 $P=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0\\\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ，$Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta\\0&\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$ 。

证明：P 和 Q 都是 $\mathbb{R}^3$ 上的刚体变换（保距变换），这里 $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 和 $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ 之间的距离定义为 $\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-y_i)^2}$ 。

b) 对于 a) 中的 P 和 Q ，令 $\theta=\arccos 3/5$ 。令 $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ 。

证明：对于任意的 $k\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ 和 $n_1,\cdots,n_k\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ ，以及任意的 $S=T_1^{n_1}\cdots T_k^{n_k}P$ ，我们有 $S\cdot e_1\neq e_1$ ，这里 $T_i\in\{P,Q\}$，$\forall i\in\{1,\cdots,k\}$ 。

提示：先证明如下事实：对于上述的 $S=T_1^{n_1}\cdots T_k^{n_k}P$ ，我们有

$$S\cdot e_1=\frac{1}{5^{n_1+\cdots+n_k+1}}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} ,$$

其中 $a,b,c\in\mathbb{Z}$ 并且 $5\nmid b$ （读作“ 5 不整除 b ”）。该事实的证明可以用数学归纳法得到。这里可以不假证明的使用如下事实（基于 5 是素数）：对于任意 $x,y\in\mathbb{Z}$ ，如果 $5\nmid x$ 且 $5\nmid y$ ，则 $5\nmid(x\cdot y)$ 。